Teoremas de tipo Banach-Stone en Variedades Riemannianas

María Isabel Garrido

Universidad CEU-San Pablo

23 de mayo de 2007

Proyectos de Investigación-MEC

- *Algunos Problemas relativos a la aproximación uniforme de funciones continuas valoradas en $\mathbb{R}$ o en un grupo topológico.* (2004–2007).

  $\mathrm{I.P.}$: Francisco Montalvo (Universidad de Extremadura).

Proyectos de Investigación-MEC

- *Algunos Problemas relativos a la aproximación uniforme de funciones continuas valoradas en $\mathbb{R}$ o en un grupo topológico.* (2004–2007).

  I.P.: Francisco Montalvo (Universidad de Extremadura).

- *Análisis Funcional no lineal y geométrico.* (2006–2009).

  I.P.: Jesús A. Jaramillo (Universidad Complutense).

Proyectos de Investigación-MEC

- *Algunos Problemas relativos a la aproximación uniforme de funciones continuas valoradas en $\mathbb{R}$ o en un grupo topológico.* (2004–2007).

  I.P.: Francisco Montalvo (Universidad de Extremadura).

- *Análisis Funcional no lineal y geométrico.* (2006–2009).

  I.P.: Jesús A. Jaramillo (Universidad Complutense).

Tesis Doctoral de Yenny Rangel (en fase de elaboración): *Álgebras de funciones diferenciables en variedades.*

El estudio de los resultados denominados de **tipo Banach-Stone** tiene su punto de partida en el siguiente problema, propuesto por Banach en 1932:

El estudio de los resultados denominados de **tipo Banach-Stone** tiene su punto de partida en el siguiente problema, propuesto por Banach en 1932:

> **¿Son (linealmente) isomorfos los espacios normados $C([0,1])$ y $C([0,1] \times [0,1])$?**

El estudio de los resultados denominados de **tipo Banach-Stone** tiene su punto de partida en el siguiente problema, propuesto por Banach en 1932:

> **¿Son (linealmente) isomorfos los espacios normados $C([0,1])$ y $C([0,1] \times [0,1])$?**

BANACH-1932: Los espacios métricos compactos X e Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos.

El estudio de los resultados denominados de **tipo Banach-Stone** tiene su punto de partida en el siguiente problema, propuesto por Banach en 1932:

> **¿Son (linealmente) isomorfos los espacios normados $C([0,1])$ y $C([0,1]\times[0,1])$?**

BANACH-1932: Los espacios métricos compactos X e Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos.

STONE-1937: Los espacios compactos X e Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

- Por un teorema tipo Banach-Stone se entiende un resultado que caracterice la estructura (topológica, uniforme, métrica, diferenciable, etc.) de un espacio X, en términos de cierta estructura algebraica o algebraico-topológica en $C(X)$ o en algún subespacio suyo.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

- Por un teorema tipo Banach-Stone se entiende un resultado que caracterice la estructura (topológica, uniforme, métrica, diferenciable, etc.) de un espacio X, en términos de cierta estructura algebraica o algebraico-topológica en $C(X)$ o en algún subespacio suyo.

- Los resultados anteriores nos dicen que la estructura de álgebra normada de $C(X)$ caracteriza la estructura topológica de un espacio compacto X.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

MILUTIN-1966: El espacio $C([0,1])$ no es sólo linealmente isomorfo a $C([0,1] \times [0,1])$, sino que lo es a todo $C(X)$ para cualquier espacio métrico X compacto y no numerable.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

MILUTIN-1966: El espacio $C([0,1])$ no es sólo linealmente isomorfo a $C([0,1] \times [0,1])$, sino que lo es a todo $C(X)$ para cualquier espacio métrico X compacto y no numerable.

> En consecuencia, la estructura lineal y topológica sobre las funciones no distingue a los espacios.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

MILUTIN-1966: El espacio $C([0,1])$ no es sólo linealmente isomorfo a $C([0,1] \times [0,1])$, sino que lo es a todo $C(X)$ para cualquier espacio métrico X compacto y no numerable.

> En consecuencia, la estructura lineal y topológica sobre las funciones no distingue a los espacios.

CUESTIÓN 1: ¿Qué estructuras se pueden considerar sobre los espacios de funciones para obtener buenos resultados?

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

HEWITT-1948: Los espacios (realcompactos) X and Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

HEWITT-1948: Los espacios (realcompactos) X and Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos.

Así pues, los anillos $C(\mathbb{R})$ y $C((0,1))$ son isomorfos puesto que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos.

HEWITT-1948: Los espacios (realcompactos) X and Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos.

> Así pues, los anillos $C(\mathbb{R})$ y $C((0,1))$ son isomorfos puesto que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos.

Pero, es claro que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ no son del todo iguales. Por ejemplo, uno es acotado y el otro no.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

HEWITT-1948: Los espacios (realcompactos) X and Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos.

> Así pues, los anillos $C(\mathbb{R})$ y $C((0,1))$ son isomorfos puesto que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos.

Pero, es claro que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ no son del todo iguales. Por ejemplo, uno es acotado y el otro no.

CUESTIÓN 2: ¿Cómo distinguir mejor los espacios que tengan más propiedades, es decir que posean más estructura?

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

GARRIDO-JARAMILLO-2000: Los espacios métricos X and Y son uniformemente homeomorfos si, y sólo si, $U(X)$ y $U(Y)$ son isomorfos como retículos vectoriales.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

GARRIDO-JARAMILLO-2000: Los espacios métricos X and Y son uniformemente homeomorfos si, y sólo si, $U(X)$ y $U(Y)$ son isomorfos como retículos vectoriales.

De modo que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ pueden ser distinguidos, no por sus funciones continuas sino por sus funciones uniformemente continuas.

Garrido-Jaramillo-2000: Los espacios métricos X and Y son uniformemente homeomorfos si, y sólo si, $U(X)$ y $U(Y)$ son isomorfos como retículos vectoriales.

De modo que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ pueden ser distinguidos, no por sus funciones continuas sino por sus funciones uniformemente continuas.

Más resultados en esta línea se pueden obtener con funciones Lipschitzianas (acotadas y no acotadas), Diferenciables, Analíticas, etc. en diferentes clases de espacios Métricos, de Longitud, Normados, etc.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

- ¿Existe un teorema de Banach-Stone para Variedades Riemannianas?

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

- ¿Existe un teorema de Banach-Stone para Variedades Riemannianas?

- Grosso modo, una variedad Riemanniana X, es un espacio en el que en cada punto hay definido un espacio vectorial tangente, algo así como una curva o como una superficie, pero de dimensión infinita (de hecho, este espacio es un Hilbert, es decir con un producto escalar).

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

- ¿Existe un teorema de Banach-Stone para Variedades Riemannianas?
- Grosso modo, una variedad Riemanniana X, es un espacio en el que en cada punto hay definido un espacio vectorial tangente, algo así como una curva o como una superficie, pero de dimensión infinita (de hecho, este espacio es un Hilbert, es decir con un producto escalar).
- En una variedad Riemanniana tiene sentido hablar de funciones diferenciables, de longitud de curvas, de distancia entre puntos, de campos tangentes, de geodésicas, etc. en una palabra de Geometría.

Teoremas tipo Banach-Stone (cont.)

Teorema-(Garrido-Jaramillo-Rangel-2007)

La estructura Riemanniana de una variedad infinito dimensional X, queda determinada por la estructura de álgebra de Banach del espacio $C_b^1(X)$, de las funciones de clase C^1 en X acotadas y con derivada acotada.